CHAPITRE 6
RESOLUTION ANALYTIQUE D'UN PROBLEME DE STATIQUE

I – PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS) :

I – 1 Enoncé :

Un système matériel est en équilibre dans un repère si et seulement si le torseur somme de **toutes les actions extérieures** appliquées à ce système est égal au torseur nul.

$$\boxed{\tau(\text{ext/système}) = \{0\}}$$

Ce qui nous donne 3 équations dans le plan, c'est à dire 2 équations de forces, et une équation de moment.

On appliquera toujours le torseur au point le plus judicieusement choisi tel que le maximum de supports de forces inconnues passe par ce point.

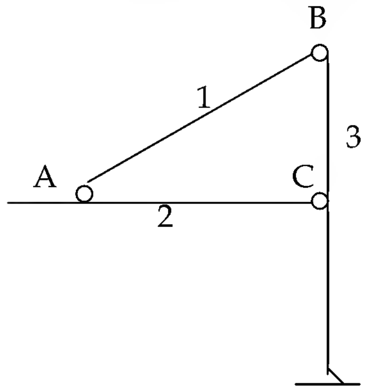
I – 2 Système en équilibre soumis uniquement à 2 forces :

Si un système matériel est en équilibre sous l'action uniquement de deux forces non nulles ayant des points d'application différents, alors les deux forces sont **directement opposées** (même intensité, même direction, sens opposés) et **même droite support**.

La droite support des deux forces est celle joignant leurs deux points d'application.

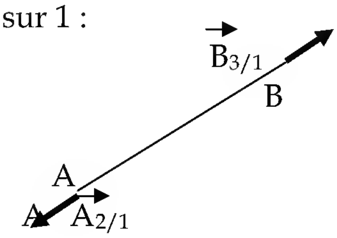
Exemple :

ABRI DE RER : Soit un cable noté 1 dont on néglige le poids P_1,



Cherchons les actions qui s'exercent sur 1 :
- action de 2 sur 1 en A
- action de 3 sur 1 en B
- poids de 1 négligé

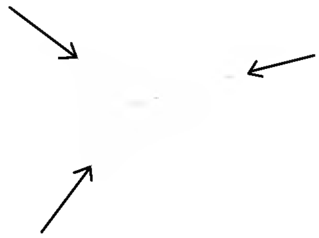
1 n'est donc soumis qu'à 2 forces qui prennent donc la direction AB.
Ces 2 forces sont directement opposées.



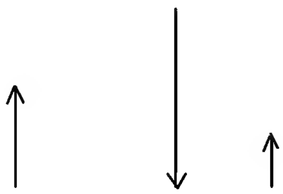
I – 3 Système en équilibre soumis uniquement à 3 forces :

Si un système matériel est en équilibre sous l'action uniquement de trois forces non nulles et ayant des points d'application différents, alors les trois forces sont **coplanaires** (dans un même plan) et sont:

- **concourantes en un point,**



- ou **parallèles**,



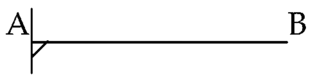
- ou ont **même droite support**.

II – CONDITIONS D'EQUILIBRE :

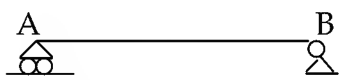
II – 1 Sur un seul solide :

* Un solide est en équilibre **isostatique** si tout mouvement du solide est impossible et si le **nombre d'inconnues de liaison appliquées à ce solide est égal au nombre d'équations**.
Dans le plan, cela donne **3 équations** et **3 inconnues**.

Exemples :



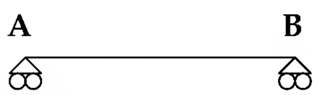
encastrement en A : 3 inconnues
pas de liaison en B : 0 inconnues
D'où 3 inconnues et 3 équations
Pas de mouvement possible
Système isostatique

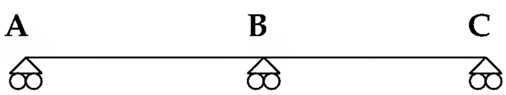


appui simple en A : 1 inconnue
articulation en B : 2 inconnues
d'où 3 inconnues et 3 équations
pas de mouvement possible
système isostatique

* S'il reste même **une seule possibilité de mouvement** ou (et) si le **nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations**, alors l'équilibre est dit "**hypostatique**". On l'appelle aussi mécanisme. En fait, il n'y a pas équilibre et le système peut bouger.

Exemples :





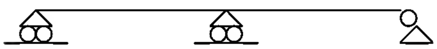
Appui simple en A : 1 inconnue
Appui simple en B : 1 inconnue
2 inconnues et 3 équations
mouvement possible horizontal
système hypostatique

appui simple en A : 1 inconnue
appui simple en B : 1 inconnue
appui simple en C : 1 inconnue
3 inconnues et 3 équations
mais mouvement possible horizontal
système hypostatique

* S'il n'y a **aucune possibilité de mouvement** et que le **nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations**, l'équilibre est dit "**hyperstatique**".

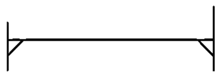
Le **degré d'hyperstaticité** est la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations.

Exemples :



2 appuis simples et 1 articulations
4 inconnues et 3 équations
pas de mouvement possible
système hyperstatique
de degré 1

1 encastrement
1 appui simple
4 inconnues et 3 équations
pas de mouvement possible
système hyperstatique
de degré 1



2 encastrements
6 inconnues
3 équations
pas de mouvement possible
système hyperstatique
de degré 3

II – 2 Sur un ensemble de solides :

On appliquera les mêmes règles que pour un seul solide, mais on tiendra compte en plus des liaisons entre tous les solides.

S'il y a **n** solides dans le système matériel, puisqu'il existe **3** équations d'équilibre par solide, on obtient **3 n équations** au total.

On calcule ensuite le **nombre d'inconnues** de liaisons qui existent entre deux solides du système matériel et on compte :
- **1 inconnue** pour **un appui simple**,
- **2 inconnues** pour **une articulation** entre deux solides,
- **3 inconnues** pour **un encastrement** entre deux solides.

Si la liaison est entre m solides, on compte alors (m-1) liaisons.
<u>exemple :</u>
Pour une articulation entre 3 solides, il y a 2 liaisons à 2 inconnues, ce qui donne 4 inconnues.
Pour un encastrement entre 3 solides, il y a 2 liaisons à 3 inconnues, ce qui donne 6 inconnues.

Le **degré d'hyperstaticité** est la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations. On pourra utiliser la formule suivante à condition d'expliquer les différentes valeurs :

$$\mathbf{d = (1 . L_1 + 2 . L_2 + 3 . L_3) - 3 n}$$

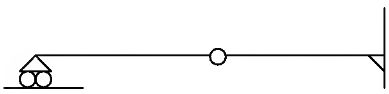
Avec :

1 est le nombre d'inconnue pour un appui simple.
2 est le nombre d'inconnues pour une articulation.
3 est le nombre d'inconnues pour un encastrement.
n est le nombre de solides.

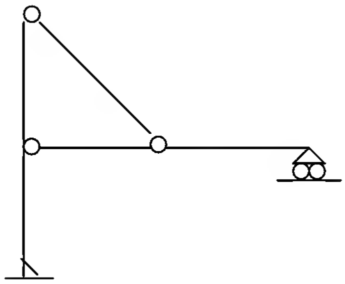
L_1 est le nombre d'appuis simples.
L_2 est le nombre d'articulations.
L_3 est le nombre d'encastrements.

d = 0 Le système est **isostatique** si pas de mouvement possible entre solides.
d > 0 Le système est **hyperstatique** si pas de mouvement possible entre solides.
d < 0 Le système est **hypostatique**.

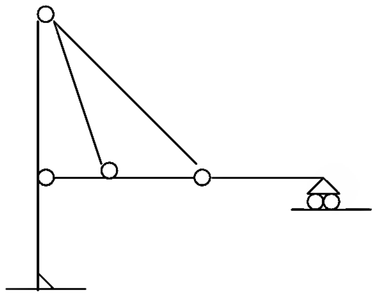
Exemples : Calculez le degré d'hyperstaticité de chaque structure.



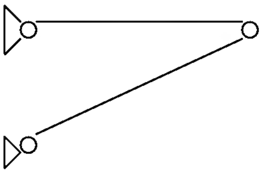
d = (1x1+2x1+3x1) – 3x2 = 0
système isostatique



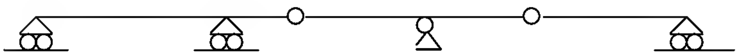
d = (1x1+4x2+3x1) – 3x4 = 0
système isostatique



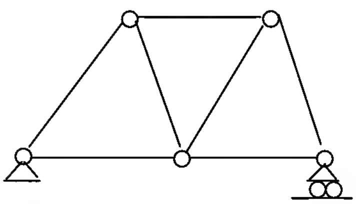
d = (1x1+2x6+3x3) – 3x5 = 1
système hyperstatique
de degré 1



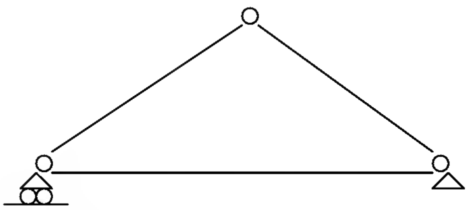
d = (1x0+2x3+3x0) – 3x2 = 0
système isostatique



d = (1x3+2x3+3x0) – 3x3 = 0
système isostatique

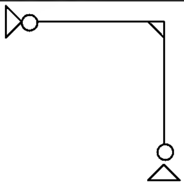


d = (1x1+2x10+3x0) – 3x7 = 0
système isostatique



d = (1x1+2x4+3x0) – 3x3 =0
système isostatique

d = (1x0+2x2+3x1) – 3x2= 1



mais **lorsqu'il y a un encastrement, on peut considérer que les 2 solides encastrés l'un dans l'autre ne font qu'un.**
Ainsi, d = (1x0+2x2+3x0) – 3x1 = 1
On obtient bien le même degré d'hyperstaticité 1.

III – METHODES DE RESOLUTION :

III – 1 Isolement d'un seul système :

III – 1 – 1 systèmes isostatiques :

Après avoir calculé le degré d'hyperstaticité avec la méthode du **II**, et après avoir constaté que le système est isostatique, on utilise la marche à suivre suivante :

1 – Ecrivez : "**J'isole le système ...**", en précisant les numéros des solides compris dans le système, afin d'identifier le système choisi. **Dessinez** ensuite le **système seul**. Placez dessus un **repère** et le **sens positif** des moments. On peut schématiser le système, mais ce n'est pas une obligation.

2 - Faîtes le **bilan de toutes les actions mécaniques extérieures** au sytème, en les dessinant sur le schéma sans en oublier. Les actions mécaniques doivent être placées exactement là où elles s'exercent. C'est pour cela que certains cas de schématisation sont dangereux.

3 - Appliquez le principe fondamental de la statique (PFS). On obtient donc **3 équations à 3 inconnues**. Le système d'équations ne sera pas difficile à résoudre si vous avez judicieusement choisi le point où vous appliquez le torseur.

4 - Résolvez ces 3 équations. **Calculez** les inconnues.

5 - On effectue un **récapitulatif** en redessinant le solide et en plaçant dessus les forces et les moments dans le bon sens et en indiquant leur intensité à côté.

III – 1 – 2 systèmes hyperstatiques :

En première et terminale génie civil, on ne résoudra jamais des systèmes hyperstatiques car ils sont trop compliqués. Par contre, au baccalauréat, le système donné peut être hyperstatique de degré 1 mais dans ce cas, l'énoncé fournit la valeur d'une des inconnues X_A ou Y_A en un point A précisé.
On applique alors la même méthode résolution qu'au **III – 1 – 1**.

III – 2 Isolement de plusieurs systèmes :

III – 2 – 1 systèmes isostatiques – principe :

Après avoir calculé le degré d'hyperstaticité avec la méthode du **II**, et après avoir constaté que le système est isostatique, on utilise la marche à suivre suivante :

Si **l'ordre d'isolement des systèmes n'est pas indiqué** dans l'énoncé, on choisit le système matériel qui nous permet de commencer la résolution, c'est à dire :

- celui qui ne comprend que 3 inconnues extérieures
- ou celui qui n'est soumis qu'à 2 forces :

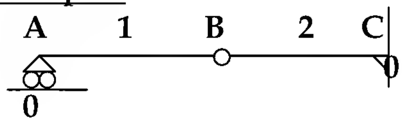
Cela peut être soit l'ensemble de tous les solides, soit un seul des solides.

On choisit ensuite les systèmes matériels appropriés pour calculer les actions de liaison demandées.
Si **l'ordre d'isolement des systèmes est indiqué** dans l'énoncé, on prend le premier isolement de système indiqué.

Dans les deux cas, on applique alors la méthode de résolution du **III – 1 – 1**.

Puis quand on passe à l'isolement de système suivant qui fait appel à une action opposée à celle trouvée lors du premier isolement de système, on y ajoute le nœud et on applique pour cette action, le principe des actions mutuelles donné au **chapitre 5**, puis sur le nouveau système isolé, la méthode de résolution du **III – 1 - 1**.

Exemple :



système 1 + 2 : 1 + 3 = 4 inconnues
système 1 : 1 + 2 = 3 inconnues
système 2 : 2 + 3 = 5 inconnues

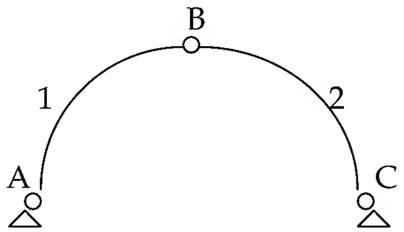
On commence donc par 1 pour calculer les actions en A et B puisque 1 n'est soumis qu'à 3 inconnues de liaison : $Y_{A0}/1$, $X_{B2/1}$ et $Y_{B2/1}$.

Ensuite on isole 2 + B qui est soumis aux 5 inconnues de liaison $X_{B1/2}$, $Y_{B1/2}$, $X_{C0/2}$, $Y_{C0/2}$ et $N_{C0/2}$.
Mais l'action en B a été calculée, c'est à dire que les valeurs de $X_{B2/1}$ et $Y_{B2/1}$ sont connues, on applique alors le principe des actions mutuelles à cette action, c'est à dire que $X_{B1/2}$ et $Y_{B1/2}$ sont dans le sens opposé mais ont la même valeur que $X_{B2/1}$ et $Y_{B2/1}$. Cela va nous permettre alors de calculer les 3 inconnues de l'action en C.

III – 2 – 2 arcs à 3 articulations :

Les arcs à 3 articulations sont des cas particuliers car on ne peut pas résoudre comme au **III – 2 - 1**. En effet, chaque solide est soumis à 4 inconnues. Il faut donc effectuer 2 isolements de systèmes et obtenir 6 équations pour pouvoir résoudre et calculer les 6 inconnues.

Exemple :



solide 1 : 4 inconnues
solide 2 : 4 inconnues
solides 1 + 2 : 4 inconnues

système isostatique
car d = (1x0+2x3+3x0) – 3x2 = 0

La marche à suivre est la suivante :

1°) Isolez le système 1 + 2 en appliquant le PFS en C et écrivez les 3 équations à 4 inconnues X_A, Y_A, X_C, Y_C.

2°) Isolez ensuite le solide 1 seul en appliquant le PFS en B et écrivez les 3 équations à 4 inconnues X_A, Y_A, $X_{B2/1}$, $Y_{B2/1}$.

3°) Résolvez les 6 équations à 6 inconnues, calculez les 6 inconnues et effectuez le récapitulatif de chaque solide.

III – 2 – 3 nœuds à plusieurs solides :

Quand il existe un nœud qui constitue une liaison entre 3 solides, on repère le solide soumis au plus d'inconnues.

On isole alors les deux autres solides chacun séparément, « avant le nœud », c'est à dire en tenant compte uniquement de la liaison et non de ce qu'il y a après la liaison.
Attention : On nomme les actions, actions du nœud (et non d'un autre solide) sur le solide car il y a trop de solides sur le nœud.

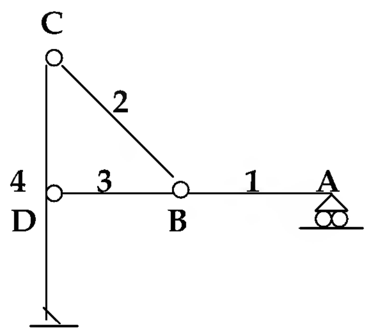
Par exemple,

1 des 2 solides peut être soumis à 3 inconnues de liaison. Il suffit alors de résoudre et de calculer ces 3 inconnues.

Ou 1 des 2 solides peut être soumis à 4 inconnues de liaison et uniquement à 2 forces (cas des solides biarticulés comme un cable), ce qui permet de connaître la direction des inconnues de liaison mais pas de calculer leurs intensités. Mais cela réduit le nombre d'inconnues.
Ensuite on isole le solide 3, celui qui est soumis au plus d'inconnues de liaison, avec le noeud. Mais on applique le principe des actions mutuelles pour les actions de 1 sur le noeud et de 2 sur le noeud qui sont donc entièrement ou partiellement connues. Cela réduit le nombre d'inconnues et permet de déterminer les autres inconnues de liaison.

Exemple : Le poids de 2 est négligé.

solide 1 : 3 inconnues
on peut résoudre et commencer par 1 pour calculer Y_A, $X_{B/1}$,$Y_{B/1}$.



solide 2 : 4 inconnues
mais solide soumis uniquement à 2 forces $\vec{C}_{4/2}$ et $\vec{B}_{B/2}$ qui prennent la direction de 2, donc CB.
On ne peut pas résoudre.

Solide 3 seul : 4 inconnues $X_{D4/3}$, $Y_{D4/3}$, $X_{B/3}$ et $Y_{B/3}$ et 3 équations. On ne peut pas résoudre.

Solide 3 avec le nœud B : Au lieu de tenir compte de l'articulation en B et donc des inconnues $X_{B/3}$ et $Y_{B/3}$, on tient compte des actions de 1 sur B et de 2 sur B, c'est à dire :

* $X_{1/B}$ et $Y_{1/B}$ dont on connaît les intensités en utilisant le principe des actions mutuelles sur $X_{B/1}$ et $Y_{B/1}$ obtenues lors de la résolution après isolement du solide 1,

* et $\vec{B}_{2/B}$, dont on connaît l'angle qui est celui de 2, mais pas l'intensité. Il n'y a donc qu'une seule inconnue pour cette force.

Ainsi sur le solide 3 en B, au lieu d'avoir 2 inconnues, il n'y en a plus qu'une qui est l'intensité de $\vec{B}_{2/B}$, ce qui ne donne plus que 3 inconnues au total sur le solide 3 + le nœud B. On peut alors résoudre.

Cas particulier :

Dans certains exercices, dans le cas d'un nœud à 3 solides, un des solides est enlevé et remplacé par son action sur le nœud.

On retiendra qu'une articulation ne peut transmettre qu'une force et jamais un moment, que s'il existe un moment sur une articulation, celui-ci est en fait appliqué à l'extrémité d'un des deux solides. Le solide sur lequel le moment est appliqué a de l'importance puisqu'on n'obtient pas les mêmes résultats si on l'applique à un solide plutôt qu'à l'autre.

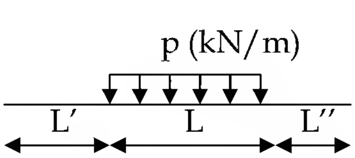
Si une force est appliquée sur une articulation, ou si une force et un moment sont appliqués sur un encastrement, on applique toujours le même principe d'isolement des systèmes. Le premier isolement se fait sur un des solides sans le nœud, donc sans la force, et avec les inconnues de la liaison. Ensuite on isole le second solide avec le nœud, on applique le principe des actions mutuelles et on tient compte aussi de la force.

De toutes façons, la force ou la force et le moment situé(s) sur le nœud ne doivent être pris en compte qu'une seule fois, sur un seul des deux solides, n'importe lequel.

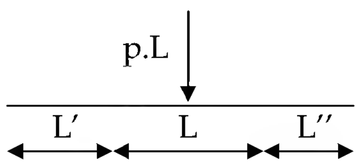
VI – METHODE DE CALCUL DE CHARGES :

Pour **calculer les actions extérieures**, on utilisera les méthodes suivantes :

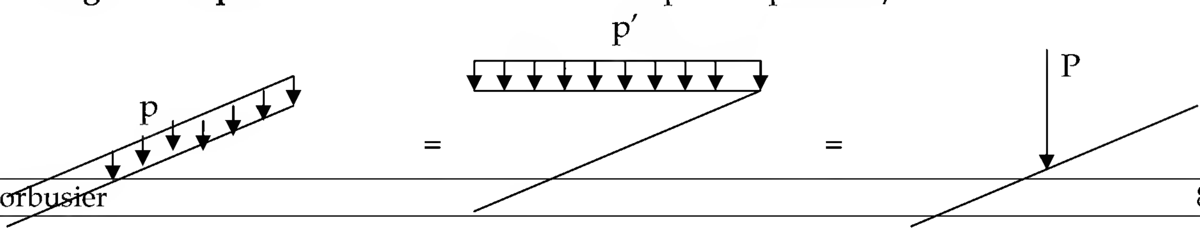
1°) La résultante d'une **charge linéique uniformément répartie** p d'unité le kN/m se trouve au milieu de la longueur L sur laquelle elle s'applique et vaut p.L.

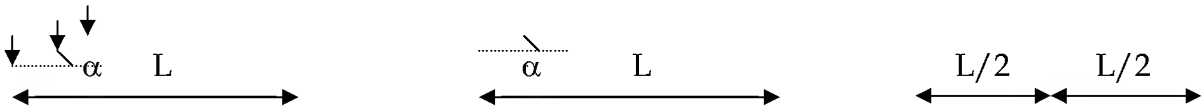


Equivaut à



2°) Cas des **charges linéiques inclinées** uniformément réparties p en kN/m :





avec **P = p .L / cosα = p'.L**

3°) Cas des moments ou couples :

Lorsqu'il y a un moment qui s'exerce sur un solide, il n'intervient que dans l'équation des moments.